# Лекція 4

**Тема:** Однорідні системи лінійних рівнянь

## План

1. Розв'язки однорідної системи лінійних рівнянь.
2. Фундаментальна система розв'язків.
3. Теорема про фундаментальну систему розв'язків.
4. Загальний розв'язок однорідної системи лінійних рівнянь.
5. Загальний розв'язок системи лінійних рівнянь.

## *Короткий зміст лекції:*

***Означення:*** Підмножина $M$ арифметичного $n$-вимірного простору $V_n$ називається його лінійним підпростором, якщо вона замкнута відносно операцій додавання векторів і множення числа на вектор, тобто:

$$\forall \vec{a} \in M \wedge \vec{b} \in M \wedge k \in R \rightarrow \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \in M \wedge k\vec{a} \in M \ .$$

Отже, множина всіх розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь утворює лінійний підпростір арифметичного $n$-вимірного простору $V_n$.

У підпросторі всіх розв'язків однорідної системи рівнянь можна вибрати скінчену максимальну лінійно незалежну систему розв'язків $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$, максимальну в тому розумінні, що приєднання до неї будь-якого розв'язку $\vec{c}$ даної системи дає вже лінійно залежну систему $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m, \vec{c}$. Цей довільний розв'язок $\vec{c}$ є лінійною комбінацією розв'язків $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$. Отже, лінійно незалежна система розв'язків $\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$ має ту властивість, що через неї лінійно виражається будь-який розв'язок $\vec{c}$ однорідної системи лінійних рівнянь.

***Означення.*** Будь-яка лінійно незалежна система розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь, через яку лінійно виражається будь-який розв'язок цієї системи, називається її фундаментальною системою розв'язків.

Невизначена система лінійних однорідних рівнянь має фундаментальну систему розв'язків.

Вона може мати багато різних фундаментальних систем розв’язків, але всі вони складаються з однієї і тієї ж кількості розв’язків, оскільки кожну з фундаментальних систем розв’язків можна прийняти за базис.

***Теорема.*** Якщо ранг *r* матриці однорідної системи лінійних рівнянь менше кількості невідомих *n*, то будь-яка фундаментальна система розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь складається з *n-r* розв’язків.

***Доведення.*** Нехай *А* є матриця системи лінійних рівнянь рангу *r*. Множина *М* усіх розв’язків системи рівнянь є підпростір простору $V_n$. Треба показати, що базис множини *М* складається з *n-r* векторів.

Нехай $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_n$ утворюють базис векторів-стовпців матриці *А*, тоді всі інші вектори-стовпці через них лінійно виражаються.

Для всіх *k*<*r* дістаємо:

$$\vec{p}_k = \sum_{j=1}^{r} c_{jk}\vec{p}_j, k = r+1, r+2, ..., n,$$

тобто

$$\vec{p}_k = c_{1k}\vec{p}_1 + c_{2k}\vec{p}_2 + ... + c_{rk}\vec{p}_r.$$

Утворимо таку множину векторів:

$$\vec{c}_k = \left(-c_{1k}, -c_{2k}, ..., -c_{rk}, 0, ..., 1, 0, ..., 0\right) -$$

для $k = r+1, r+2, ..., n$, де одиниця дорівнює *k*-ому компоненту вектора $\vec{c}_k$.

Наприклад,

$$\vec{c}_{r+1} = \left(-c_{1r+1}, -c_{2r+1}, ..., -\vec{c}_{r\,r+1}, 1, 0, 0, ..., 0\right), \ \vec{c}_n = \left(-c_{1n}, -c_{2n}, ..., -c_{rn}, 0, 0, ..., 1\right)$$

Вектори $\vec{c}_k$ *n*-вимірні. Всі вектори

$$\vec{c}_{r+1}, \vec{c}_{r+2}, ..., \vec{c}_n$$

будуть розв’язками однорідної системи.

Перевіримо це, наприклад, для вектора $\vec{c}_{r+1}$:

$$A\vec{c}_{r+1} = -c_{1r+1}\vec{p}_1 - c_{2r+2}\vec{p}_2 - \ldots - c_{r\,r+1}\vec{p}_r + \vec{p}_{r+1} =$$
$$= -c_{1r+1}\vec{p}_1 - c_{2r+2}\vec{p}_2 - \ldots - c_{r\,r+1}\vec{p}_r + c_{1r+1}\vec{p}_1 + c_{2r+2}\vec{p}_2 + \ldots + c_{r\,r+1}\vec{p}_r = \vec{0}$$

Крім того, ці вектори будуть лінійно незалежними. Дійсно, складемо їх лінійну комбінацію:

$$\vec{c} = \sum_{k=r+1}^{n} t_k \vec{c}_k$$

Із структури векторів $\vec{c}_k$ випливає, що у вектора $\vec{c}$ решта *n*-*r* компонентів будуть такі:

$$t_{r+1}, t_{r+2}, \ldots, t_n .$$

Отже, $\vec{c} = \vec{0}$ тільки тоді, коли

$$t_{r+1} = t_{r+2} = \ldots = t_n = 0 ,$$

а це означає, що множина векторів $\vec{c}_k$ є лінійно незалежною.

Покажемо, що кожний вектор з множини $M$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{c}_k$.

Нехай $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – будь-який розв’язок однорідної системи лінійних рівнянь. Тоді вектор

$$\vec{b} = \vec{a} - \sum_{k=r+1}^{n} a_k \vec{c}_k$$

також буде розв’язком системи рівнянь, тому що вектори $\vec{a}, \vec{c}_{r+1}, \vec{c}_{r+2}, \ldots, \vec{c}_n$ є розв’язками цієї системи, а вектор $\vec{b}$ є їх лінійна комбінація.

З виразу для вектора $\vec{b}$ виходить, що він матиме вигляд $\vec{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, 0, \ldots, 0)$.

Оскільки вектор $\vec{b}$ є розв’язком системи однорідних лінійних рівнянь, то справджується тотожність

$$b_1\vec{p}_1 + b_2\vec{p}_2 + \ldots + b_r\vec{p}_r = \vec{0}.$$

Але ж вектори $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_r$ за умовою за умовою лінійно незалежні, тому $b_1 = b_2 = ... = b_r = 0$.

Отже, $\vec{b} = (0, 0, 0, ..., 0) = \vec{0}$.

Тоді з рівності

$$\vec{b} = \vec{a} - \sum_{k=r+1}^{n} a_k \vec{c}_k$$

випливає, що

$$\vec{a} = \sum_{k=r+1}^{n} a_k \vec{c}_k \ ,$$

тобто кожний розв'язок $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{c}_{r+1}, \vec{c}_{r+2}, ..., \vec{c}_n$, отже , вони утворюють базис множини *M*. Звідси випливає, що ранг множини *M* дорівнює *n*-*r*.

Знайдена множина векторів $\vec{c}_{r+1}, \vec{c}_{r+2}, ..., \vec{c}_n$ є фундаментальною системою розв'язків однорідної системи.

Отже, множина *M* розв'язків однорідної системи має таку множину лінійно незалежних векторів, при якій кожний розв'язок системи буде лінійною комбінацією цих векторів (тобто фундаментальну систему розв'язків).

Однорідна система

$$A\vec{x} = \vec{0}$$

має ненульові розв'язки, коли $r<n$, $n$ – кількість невідомих. Тоді серед векторів-стовпців $\vec{p}_1, \vec{p}_2, ..., \vec{p}_n$ можна різними способами виділяти базиси, а отже, і утворювати відповідні їм фундаментальні множини розв'язків.

Лінійна комбінація фундаментальної системи розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь називається загальним розв'язком цієї системи.

Якщо $\vec{c}_0$ – деякий розв'язок (частинний) загальної системи лінійних рівнянь і

$$\vec{y} = y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + ... + y_{n-r}\vec{b}_{n-r} \ -$$

загальний розв’язок відповідної до неї системи однорідних лінійних рівнянь, то

$$\vec{z} = \vec{c}_0 + \vec{y} = \vec{c}_0 + y_1\vec{b}_1 + y_2\vec{b}_2 + \ldots + y_{n-r}\vec{b}_{n-r}$$

є загальним розв’язком неоднорідної системи лінійних рівнянь.

Отже, загальний розв’язок неоднорідної системи дорівнює сумі будь-якого розв’язку цієї системи та загального розв’язку зведеної однорідної системи (теорема про накладання розв’язків).

## *Контрольні питання для самоперевірки*

1. Елементом якого конкретного лінійного простору є розв’язок однорідної системи $m$ лінійних рівнянь з $n$ невідомими?
2. Чи є лінійним простором множина всіх розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь із звичайними операціями додавання і множення на число над матрицями-стовпцями?
3. Яка розмірність лінійного простору розв’язків однорідної системи 8 лінійних рівнянь з 12 невідомими, якщо відомо, що ранг матриці системи дорівнює 4?
4. Що називається фундаментальною системою розв’язків (ФСР) однорідної системи лінійних рівнянь?
5. Як побудувати ФСР однорідної системи лінійних рівнянь?
6. Скільки ФСР однорідної системи лінійних рівнянь можна побудувати?
7. Знайти ФСР та загальний розв’язок однорідної системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

8. Відомо, що сукупність стовпців

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

є ФСР деякої однорідної системи лінійних рівнянь.

а) Скільки рівнянь може бути в цій системі?

б) Навести приклад такої системи, що складається з трьох рівнянь.

9. Знайти загальний розв’язок системи лінійних рівнянь (за допомогою теореми про накладання розв’язків)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = -1. \end{cases}$$

10. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи лінійних рівнянь, заданої своєю основною матрицею $A$ і стовпцем вільних членів $B$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

11. Доведіть теорему про фундаментальну систему розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь.

12. Доведіть теорему про накладання розв’язків.

***Література:*** С. Г. Завало та інші, Алгебра і теорія чисел, Ч. І – К.: Вища шк., 1997, гл. 5, §22.5; 22.6.